Введение в теорию Галуа - семинар 6

20 октября 2025

(1) Найдите степень поля разложения $X^8 - 2$ над $\mathbb{Q}$.
(2) Посчитайте группы Галуа полей разложения следующих многочленов:
   (a) $X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$;
   (b) $X^3 + 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$;
   (c) $X^4 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$, его кубическая резольвента равна $X^3 - 8X + 16$;
   (d) $X^4 + 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$, его кубическая резольвента равна $(X-4)\left(X^2 - 8\right)$;
   (e) $X^4 - 10X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$, его кубическая резольвента равна $(X+10)(X+4)(X-4)$;
   (f) $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, его кубическая резольвента равна $X^3 + 8X$;
(3) Приведите пример расширения полей E/F степени 4, для которого не существует промежуточного расширения M такого, что $F \subset M \subset E, [M : F] = 2$.
(4) Полная группа Галуа.
   (a) Предположим, что транзитивная подгруппа $G \subset S_5$ содержит транспозицию. Докажите, что тогда $G = S_5$.
   (b) Пусть $P \in \mathbb{Z}[X]$ - многочлен степени 5 со старшим коэффициентом 1. Предположим, что P неприводим, и что P имеет ровно два невещественных комплексных корня. Покажите, что тогда группа Галуа поля разложения многочлена P равна S_5.
   (c) Докажите, что группа Галуа поля разложения многочлена $P(X) = X^5 - 4X + 2$ равна S_5.
(5) Пусть $f(X) = X^5 + aX + b, a, b \in \mathbb{Q}$. Покажите, что $G_f \approx D_5$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:
   - многочлен $f(X)$ неприводим в $\mathbb{Q}[X]$,
   - дискриминант $D(f) = 4^4a^5 + 5^5b^4$ многочлена $f(X)$ является квадратом в $\mathbb{Q}[X]$,
   - группа G_f разрешима (по пока еще не доказанной нами теореме Галуа это равносильно тому, что уравнение $f(X) = 0$ разрешимо в радикалах).

   Подсказка: посмотрите на производную многочлена f и оцените, сколько вещественных корней он может иметь.
(6) Циклотомические расширения $\mathbb{Q}$.
   (a) Пусть p — простое число, $f \in \mathbb{Z}[X]$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, такой что многочлен $f(\bmod\ p) \in \mathbb{F}_p[X]$ не имеет кратных корней в поле разложения. Покажите, что многочлен f над $\mathbb{Q}$ не имеет кратных корней.
   (b) Пусть $\mathbb{Q} \subset L$ — поле разложения многочлена f из пункта (a), $\alpha \in L$ — некоторый корень многочлена f, и пусть P — минимальный многочлен элемента α над $\mathbb{Q}$. Предположим, что $f(\alpha^p) = 0$. Докажите, что тогда $P(\alpha^p) = 0$.
   (c) Пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ - примитивный корень степени n из 1. Покажите, что минимальный многочлен R элемента ζ над $\mathbb{Q}$ обращается в нуль в ζ^p для любого p, взаимно простого с n.

(d) Покажите, что $R(X) = \prod_{i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \left(X - \zeta^i\right)$.

(e) Пусть E — это поле разложения многочлена $X^n - 1$. Покажите $\mathrm{Gal}\,(E/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

(7) Напишите многочлен, который делится на все неприводимые многочлены степени 3 в $\mathbb{F}_7[X]$.