Введение в теорию Галуа - семинар 3

29 сентября 2025

(1) Пусть $f \in F[X]$ и F — это поле характеристики 0. Пусть $d(X) = \gcd(f, f')$. Покажите, что многочлен $g(X) = f(X)d(X)^{-1}$ имеет такие же корни, как $f(X)$, и все корни $g(X)$ являются простыми.

(2) Постройте поле разложения многочлена $X^5 - 2$ над полем $\mathbb{Q}$. Чему равна степень этого расширения над $\mathbb{Q}$?

(3) Постройте поле разложения многочлена $X^{p^m} - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$. Чему равна степень этого расширения над $\mathbb{F}_p$?

(4) (a) Докажите, что любое конечное поле совершенно.
  (b) Пусть $F \subset E$ — алгебраическое расширение полей. Докажите, что если F — совершенно, то E — тоже совершенно.
  (c) Докажите, что алгебраически замкнутое поле совершенно.

(5) Пусть F — это поле, чья характеристика не равна 2.
  (a) Пусть E — это квадратичное расширение F (то есть, $[E : F] = 2$); покажите, что

$$S(E) = \left\{a \in F^\times \mid a \text{ — является квадратом в } E\right\}$$

  является подгруппой в $F^\times$, содержащей $F^{\times 2}$.
  (b) Пусть E и E' — это квадратичные расширения F. Покажите, что F-изоморфизм $\varphi : E \to E'$ существует тогда и только тогда, когда $S(E) = S(E')$.
  (c) Покажите, что существует бесконечный набор полей $E_1, E_2, \ldots$, где E_i — это квадратичное расширение $\mathbb{Q}$, и E_i не изоморфно E_j для любых $i \neq j$.
  (d) Пусть p — это нечетное простое число. Покажите, что с точностью до изоморфизма существует единственное поле из p^2 элементов.

(6) (a) Пусть F — это поле характеристики $p > 0$. Покажите, что если $X^p - X - a$ — это приводимый многочлен в $F[X]$, то он разложим в $F[X]$.
  (b) Для любого простого числа p покажите, что $X^p - X - 1$ — это неприводимый многочлен в $\mathbb{Q}[X]$.

(7) Пусть $P \in \mathbb{Q}[X]$ - неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Q}, P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ - его разложение над $\mathbb{C}, \alpha = \alpha_1 \in \mathbb{C}$ - один из его корней.
  (a) Выразим произвольный элемент $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{C}$ как $\beta = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, где $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Определим норму Галуа элемента β по формуле:

$$\operatorname{Nm}(\beta) = \prod_{i=1}^n \left(a_0 + a_1\alpha_i + \ldots + a_{n-1}\alpha_i^{n-1}\right)$$

  Докажите, что $\operatorname{Nm}(\beta) \in \mathbb{Q}$
  (b) Покажите, что отображение $\operatorname{Nm} : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}$ является мультипликативным гомоморфизмом, т.е. что для любых $\beta, \beta' \in \mathbb{Q}(\alpha)$ выполняется $\operatorname{Nm}(\beta\beta') = \operatorname{Nm}(\beta)\operatorname{Nm}(\beta')$.

(c) Докажите, что число $\gamma = \prod_{i=2}^{n} \left(a_0 + a_1\alpha_i + \ldots + a_{n-1}\alpha_i^{n-1}\right) \in \mathbb{C}$ принадлежит полю $\mathbb{Q}(\alpha)$, и что $\alpha^{-1} = \gamma / \operatorname{Nm}(\alpha)$.

(d) Проверьте равенство $\operatorname{Nm}(\beta) = \det(M_\beta)$, где $M_\beta : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha)$ - $\mathbb{Q}$-линейный оператор умножения на β, т.е. $M_\beta(x) = \beta x$.

(8) Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ — это корень неприводимого многочлена $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$. Постройте явно минимальные многочлены для $-\alpha$ и α^{-1}.