Введение в теорию Галуа - семинар 1

8 сентября 2025

(1) Пусть $r \in \mathbb{Q}$ — это корень многочлена
$$a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$
и пусть $r = c/d, c, d \in \mathbb{Z}, \gcd(c,d) = 1$. Тогда $c \mid a_0$ и $d \mid a_m$.

(2) (Лемма Гаусса). Пусть $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Если $f(X)$ нетривиально разложим в $\mathbb{Q}[X]$, то он нетривиально разложим в $\mathbb{Z}[X]$.

(3) Если $f \in \mathbb{Z}[X]$ приведен, то любой приведенный множитель f в $\mathbb{Q}[X]$ лежит в $\mathbb{Z}[X]$.

(4) (Критерий Эйзенштейна). Пусть
$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z},$$
предположим, существует простое число p, для которого верно:
- p не делит a_m,
- p делит $a_{m-1}, \ldots, a_0$,
- p^2 не делит a_0.

Тогда f неприводим $\mathbb{Q}[X]$.

(5) Множество алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$ счетно.

(6) Пусть $E = \mathbb{Q}[\alpha]$, где $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 2 = 0$. Выразите $\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)\left(\alpha^2 - \alpha\right)$ и $(\alpha - 1)^{-1}$ в виде $a\alpha^2 + b\alpha + c$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(7) Посчитайте $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

(8) Пусть F — это поле и пусть $f(X) \in F[X]$.

(a) Для любого $a \in F$, покажите, что существует $q(X) \in F[X]$, для которого верно
$$f(X) = q(X)(X - a) + f(a)$$

(b) Покажите, что $f(a) = 0$ тогда и только тогда $(X - a) \mid f(X)$.

(c) Покажите, что $f(X)$ имеет не более $\deg f$ корней.

(d) Пусть G — это конечная абелева группа. Если G имеет не более m элементов порядка, делящего m для каждого m, делящего порядок $|G|$. Докажите, что G — циклическая.

(e) Покажите, что любая конечная подгруппа $(F^\times, \cdot)$, где F — это поле, является циклической.

(9) (*) Число $\alpha = \sum \frac{1}{2^{n!}}$ трансцендентно.