Введение в теорию Галуа - листок

ноябрь-декабрь 2025

Для получения максимальной оценки за листок достаточно полностью решить и сдать любые 5 задач из следующего списка (пункты считаются долей задачи). Новые задачи (возможно) будут появляться здесь со временем. Сдача задач происходит в 17:50-19:10 устно 22 ноября, 1, 8 и 15 декабря.

Вам может пригодиться формула для дискриминанта многочлена вида $f(X) = X^n + pX + q$:

$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} n^n q^{n-1} + (-1)^{(n-1)(n-2)/2}(n-1)^{n-1}p^n.$$

(1) Пусть $n \geqslant 0$ и обозначим через $\zeta_{2^{n+2}}$ примитивный корень степени 2^{n+2} из единицы и через α_n сумму $\alpha_n = \zeta_{2^{n+2}} + \zeta_{2^{n+2}}^{-1}$. Пусть K_n и K_n^+ — следующие поля:

$$K_n = \mathbb{Q}\left(\zeta_{2^{n+2}}\right); \qquad K_n^+ = \mathbb{Q}\left(\alpha_n\right).$$

- (a) Посчитайте для всех $n \geq 0$ степени $\left[K_n : \mathbb{Q}\right], \left[K_n : K_n^+\right], \left[K_n^+ : \mathbb{Q}\right]$, и $\left[K_{n+1}^+ : K_n^+\right]$.
- (b) Найдите минимальный многочлен для $\zeta_{2^{n+2}}$ над полем K_n^+.
- (c) Докажите равенство:

$$\alpha_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ раз}).$$

(2) Пусть $f \in \mathbb{Q}[X]$ и G — это группа Галуа поля разложения f над $\mathbb{Q}$.

- (a) Покажите, что если $f = X^5 + 20X + 16$, то $G = A_5$.
- (b) Покажите, что если $f = X^6 - 4X^3 + 1$, то $G = D_6$.

(3) Пусть F — поле характеристики 2 и $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ — неприводимый многочлен в $F[X]$.

- (a) Покажите, что линейной заменой переменной над F многочлен f можно привести к виду $X^3 + pX + q$.
- (b) Покажите, что дискриминант f является квадратом в F.
- (c) Покажите, что группа Галуа поля разложения f равна A_3 тогда и только тогда, когда многочлен $X^2 + qX + \left(p^3 + q^2\right)$ имеет корень в F.

(4) Пусть G — это группа и $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — это точная последовательность G-модулей. Докажите, что следующая последовательность точна:

$$0 \longrightarrow M'^G \longrightarrow M^G \longrightarrow M''^G \xrightarrow{d} H^1\left(G, M'\right) \longrightarrow H^1(G, M) \longrightarrow H^1\left(G, M''\right).$$

(5) Докажите, что рациональные решения $a, b \in \mathbb{Q}$ уравнения Пифагора $a^2 + b^2 = 1$ имеют вид:

$$a = \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}, \quad b = \frac{2st}{s^2 + t^2}, \quad s, t \in \mathbb{Q}$$

(Подсказка: используйте теорему Гильберта 90).